سلم تصحيح مقرر نظرية الاحتمالات

سنة ٣ رياضيات، ف١، (٢٠١٥ - ٢٠١٦)

ج١: (٤٠ درجة)

أ) لدينا $f(x)=1 \; , \; x\in[0,1]$ عندئذ:

1) $g_Y(y)=f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|_{x=e^{-y}} = e^{-y}, \; y>0$ (3) أي Y أسي بسيط $\lambda=1$.

2) $F_Y(y)=1-e^{-y}; \; y>0$ (3)

4) $M_Z(t)=M_{\sum Y_i}(t)=(M_Y(t))^n=(1-t)^{-n}$ (6) $M_Y(t)=(1-t)^{-1}$ أي Z غاما بسيط بوسيطين n والثاني $\alpha=1$.

3) $P(Y>1)=1-F_Y(1)=1-(1-e^{-1})=e^{-1}=\frac{1}{e}$ (3)

5) $E(3Z)=3EZ=3\frac{\lambda}{\alpha}=3n$ (2), $V(3Z)=9V(Z)=9n$ (2)

6) $M_W(t)=Ee^{\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)^t}$ (2) $=E(1-x)^t x^{-t}=\int_0^1 x^{1-t-1}(1-x)^{t+1-1}dx$ (2) $=\beta(1-t,1+t)$ (3)

7) $EY_1Y_2=EY_1EY_2=(1)(1)=1$ (1), $M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2)=(1-t_1)^{-1}(1-t_2)^{-1}$ (3)

$\rho(3Y_1,4Y_1+2)=\rho(Y_1,Y_1)=1$ (1)

2') $F_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2)=F_{Y_1}(y_1)F_{Y_2}(y_2)=(1-e^{-y_1})(1-e^{-y_2}), \; y_1>0, y_2>0$ (3)

3') $P(Y_1>1, Y_2>1)=(1-F_{Y_1}(1))(1-F_{Y_2}(1))=e^{-1}\cdot e^{-1}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$ (3)

4') $g_U(u)=2[1-F_Y(u)]f_Y(u)=2e^{-2u}$ (4) $u>0$

5') $g(z_1,z_2)=f(y_1,y_2)|J|_{\substack{y_1=z_1z_2\\ y_2=z_2}}=z_2e^{-z_2(1+z_1)}$ (4) $z_1>0, \; z_2>0$

ب)

1) $F(x/y)=1-e^{-\frac{x}{2y}}$ (3), $x>0, y>0$

2) $P(X>4/Y=2)=1-F(4/y=2)=1-(1-e^{-1})=e^{-1}$ (3)

3) $M_{X/Y=1}(t)=(1-2yt)^{-1}$ (2) $=(1-2t)^{-1}$, $E(X/Y=1)=2y|_{y=1}=2$ (2)

$V(X/Y=1)=4y^2|_{y=1}=4$ (3)

ج٢:

أ)

1) $M_X(t)=e^{-2(1-e^t)}$ (4), $K_X(t)=-2(1-e^t)$ (4), $M(1,t)=e^{-2(1-t)}$ (4)

$M_{\cdot}(t)=e^{-2t}M_X(t)=e^{-2t}e^{-2(1-e^t)}$ (4)

$$2)\ P(X+Y=n)=\sum_{i=0}^{n} P_X(i)P_Y(n-i) \overset{(2)}{=} e^{-4}\sum_{i=0}^{n}\frac{2^i}{i!}\frac{2^{n-i}}{(n-i)!} \overset{(2)}{=} e^{-4}\frac{4^n}{n!},\ n=0,1,\ldots$$

$$P(X=k/X+Y=n)=\frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{e^{-4}\frac{4^n}{n!}} \overset{(2)}{=} C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\ (2)\ k=0,1,\ldots,n$$

ب)

لدينا

$$\varphi_X(t)=e^{-2|t|},\ t\in R$$

توزيع كوشي بالوسيط 0 و 2 أي

$$1)\ f_X(t)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{4+x^2}\ (4),\ x\in R$$

$$2)\ F_X(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2},\ x\in R\ (4)$$

$$3)\ \varphi_{\bar{X}}(t)=\left(\varphi_X\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n=\left(e^{-2\left|\frac{t}{n}\right|}\right)^n=e^{-2|t|}\ (4)$$

أي الدالة المميزة لـ $\bar{X}$ هي نفس الدالة المميزة لـ X وبالتالي لهما نفس التوزيع أي كوشي.

$$4)\ F_{(X_1,X_2)}(x_1;x_2)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{2}\right)\ (2),\ x_1\in R,\ x_2\in R$$

$$5)\ P(X_1<2,\ X_2<2)=F_{X_1}(2)F_{X_2}(2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}\ (2)$$